TD 2 : Ensembles Indications

Dans tout ce TD, E est un ensemble et A, B, C et D sont quatre parties de E.

Écriture des ensembles

1 ★★☆ On note $A = \left\{ x - \frac{1}{x} \;\middle|\; x \in [1, +\infty[\right\}$. Montrer que $A = \mathbb{R}_+$.

On peut s'inspirer d'un exemple similaire du cours.

2 ★★ Montrer que les ensembles suivants sont égaux :

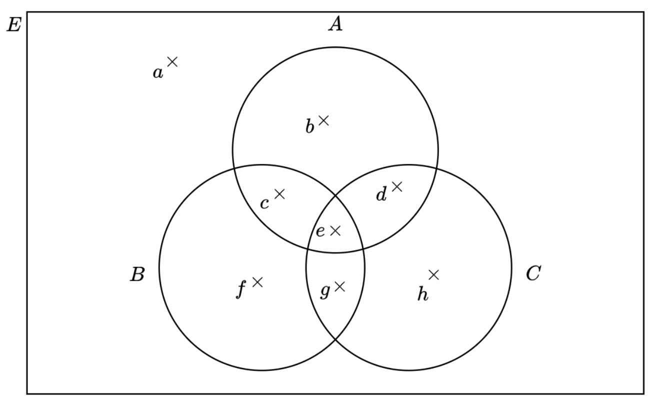
$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x - y = 1 \right\}$$

$$B = \left\{ (t+1, 4+3t) \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Raisonner par double inclusion et bien utiliser les caractérisations de l'appartenance.

Opérations sur les ensembles

3 ★ On considère un ensemble E à 8 éléments dénotés a, b, c, d, e, f, g, h. On définit A, B et C trois sous-ensembles de E selon le schéma ci-dessous :



1) Déterminer les ensembles suivants :

$$A \cap C, \quad B \setminus (A \cup C), \quad \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

2) Donner une partition de A en quatre ensembles, qu'on exprimera en fonction de A, B et C (ou de leurs complémentaires).

3) Écrire l'ensemble $\{c, d, g\}$ en fonction de A, B et C (ou de leurs complémentaires).

1) On peut utiliser les lois de Morgan pour simplifier les deux derniers ensembles.

2) Il n'y a qu'une seule partition de A en quatre ensembles : ce sont les quatre points de A !

4 ★ Soit $F \subset E$ et P un prédicat défini sur E. Compléter les lignes ci-dessous par $\Longrightarrow$ ou $\Longleftarrow$ selon ce qui est approprié :

$$\forall x \in E \quad P(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \forall x \in F \quad P(x)$$

$$\exists x \in E \quad P(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \exists x \in F \quad P(x)$$

Ce n'est pas trop dur : si une de ces assertions est vraie, est-ce qu'elle entraine l'autre ?

5 ★★ Soit $F \subset E$ et P un prédicat défini sur E. Donner toutes les implications qui sont valides entre les assertions suivantes :

$$\begin{aligned}
A :&\quad \forall x \in E \quad \exists y \in E \quad P(x,y)\\
B :&\quad \forall x \in E \quad \exists y \in F \quad P(x,y)\\
C :&\quad \forall x \in F \quad \exists y \in E \quad P(x,y)\\
D :&\quad \forall x \in F \quad \exists y \in F \quad P(x,y)
\end{aligned}$$

Il faut que ces implications soient valides en toute généralité. Par exemple $A \Longrightarrow C$: si pour tout x dans E, il existe un $y \in E$ tel que $P(x,y)$, alors *a fortiori* cela est aussi vrai pour tout x dans F, car $F \subset E$.

6 ★★ Montrer les équivalences suivantes (attention, c'est long !) :

$$A = B \iff A \cup B = A \cap B$$

$$A \cup B = B \cap C \iff A \subset B \subset C$$

C'est un exercice de méthode :

- Pour montrer une équivalence, raisonner par double implication.
- Pour montrer une égalité d'ensemble, raisonner par double inclusion.
- Pour montrer une inclusion, utiliser la caractérisation.

Penser aussi à se servir d'inclusions "évidentes", telles que $A \subset A \cup B$.

Autres notions du chapitre

7 ★☆ Que vaut $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{1\}))$?Déterminer $\mathscr{P}(\{1\})$ dans un premier temps. Pour y voir plus clair, on pourra poser $A_1, A_2, \cdots$ les différents sous-ensembles de $\mathscr{P}(\{1\})$ pour ensuite calculer sereinement $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{1\}))$.

8 ★★ Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1) $\mathscr{P}(A \cap B) \subset \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$
2) $\mathscr{P}(A \cap B) \supset \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$
3) $\mathscr{P}(A \cup B) \subset \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$
4) $\mathscr{P}(A \cup B) \supset \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$

C'est moins difficile que ça en a l'air ! Utiliser les caractérisations.

9 ★★ Simplifier les ensembles suivants :

1) $A = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}]-n, n[$
2) $B = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}, n\right]$
3) $C = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]0, 1+\frac{1}{n}\right[$

Pour chaque ensemble, essayer de deviner quel serait l'ensemble simplifié, puis raisonner par double inclusion.

10 ★★★ Soit E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$:

1. $A \cup X = B$
2. $A \cap X = B$

Raisonner par analyse-synthèse. Trouver d'abord une condition nécessaire sur A et B pour qu'une solution X puisse exister.